**1)Нормы векторов и матриц**

Нормой ветора называется функционал такой, что:

*Две нормы*

*(C1,C2>0 -константы эвивалентности)*

*Нормой матрицы называется функционал такой, что:*

Норма матрицы A согласованна с век x, если для

Матричная норма A называется подчинённой векторной нормы, если

*Доказательство*

*Доказательство*

*I\* - номер строки матрицы А, при котром выполняется*

***2)Метод Гаусса***

*Ax = f*

*На первом шаге будем умножать первое уравнение матрицы A на коэффициент*

*Таким образом из этих строк исключив x1 i=2,n*

*Полагая, что исключаем x2 из 3 и всех остальных уравнений*

*Продолжаем процедуру k=1,n и через n – 1 , получим систему с верхней треугольной матрицей.*

*Привидение системы (1) к виду (3) – прямой ход методом Гаусса.*

*Обратный ход:*

*I = n-1,1*

*Основной недостаток метода – сильное влияние ошибок округления.*

*Метод Гаусса с выбором ведущего элемента*

*Чтобы избежать негативного влияния ошибок округления, на шаге с номером K в качестве ведущего элемента выбираем не , а максимальный по модулю элемент K -ой строки или K – го столбца или максимального элемента из всей подматрицы.*

*Затем с помощью перестановок строк и стобцов переводим выбранный элемент на место ведущего.*

***3) LU, LDU, факторизация***

*Теорема(о существовании LU – разложения)*

*Если*

*Доказательство по индукции:*

*т.к*

*Теорема(о существовании LDU – разложения)*

*Если*

*Доказательство*

*Существование такое разложения следует из теоремы 1*

*Сначала в соотсвествии с теоремой 1 находим разложение A=LR, R=DU, где D -диагональная матрица, состоящая из диагональных элементов матрицы R.*

*Докажем единственность от противного:*

*Теорема(о существовании – разложения)*

*Если*

*Доказательство*

*Т.к*

*По теореме 2:*

***4)Метод квадратного корня***

*Если*

*Доказательство*

*Из теоремы о – разложении*

*Т.к*

*i =1*

*;*

***5)Метод прогонки***

*Метод прогонки – главный частный случай метода Гаусса. Метод применим к системам с трёхдиагональной матрицей. Такие системы возникают при решении краевых задач для ДУ 2-го порядка.*

*Прямой ход метода Гаусса сводится к исключению элемента . Получается треугольная система, содержащая в каждом уравнении*

*Если данное условие выполняется для всех значений и хотя бы для одного выполнятся строго, то возможность деления на 0 исключается и исходная система имеет единственное решение.*

*Доказательство*

*Предположим, что при некотором значении i. Тогда выполняется цепочка неравенств:*

*Деления на 0 не происходит. При выполнении условия д.п. формула прогонки исключает деление на 0 и устойчива к ошибкам округления. Условие является достаточным, но не необходимым.*

*Замечание: Пусть прогоночные коэффициенты вычисляются точно и без ошибок, а вычисляется с погрешностью*

*=*

***6)QR - факторизация***

***Теорема о QR-разложении***

*Факторизация – разложение матрицы в произведение.*

*Матрица наз. ортогональной, если . Из определения ортогональности матрицы следует, что столбцы этой матрицы принадлежат имеет m координат. Для столбцов Q выполняется:*

*=1, если i=j иначе 0. Столбцы ортогоной матрицы являются ортонормированными. Для квадратной матрицы (m=n) Q:*

*, E= , Q=E.*

*Т.к. ортогон., то строки матрицы Q также явл. ортонормированными. если Q принадлежат, то значит квадратная матрица Q невырожденная. 1= detE =det()= detdet = и detQ=±1.*

*QR-факторизация матрицы есть разложение A=QR(1), – квадратная ортогон. матрица*

*– верхнетреугольная матрица. m≥n.*

*=*

*В силу того, что R имеет нулевые строки, начиная с n+1 и по строчку m, столбцы с соответствующими номерами в матрице Q можно опустить и рассматривать сокращённую формулу:*

*Теорема: QR-разложение существует для любой квадратной матрицы.*

*Док-во. 1) пусть detA≠0 значит >0. ( для любого x≠0*

*Кроме того, явл.симметричной матрицей, следует существует разложение Холесского: , из которого следует Q=Aявл.ортогональной:*

*=. Следует Q ортогональна.*

*2) если detA=0. Для достаточно больших n возмущенная матрица будет невырождена. Поэтому существует QR-разложение матрицы =.*

*Мн-во ортогональных матриц QR явл.компактным следует существует сходящаяся подпоследовательность ->Q следует A->A Конец док-ва*

*Следствие:*

*Для невырожденной матрицы А, Q и R определяются однозначно, если потребовать, чтобы элементы главной диагонали матрицы R были положительны.*

*Пусть А принадлежит , m≥n. Тогда сущ.разложение A=QR вида (2), где квадратная верхнетреугольная, а Q имеет ортонормир. столбцы. Для докозательства достаточно дополнить матрицу А нулевыми столбцами до квадратной матрицы.*

***7)* *Ортогонализация Грама-Шмидта***

*, i=1,n – i-ое уравнение Ax=b.*

*=(2). , , – k-тые столбцы. Очевидно, , k=1,..,n (3).*

*Если нулевой вектор.*

*, = (4)*

*Положим, что ортогон.система векторов , j=1,k-1 уже построена, удовлетвор. ур-ю (3). Найдем след.вектор . Запишем систему (3) в виде:*

*Из (3) следует (5)*

*Умножаем ур-е (5) на вектор , где j=1,…,k-1. Находим*

*Если вектор линейно зависит от векторов , а значит, что он лин.зависит от и ,*

*В противном случае если не зависит линейно от предыдущих векторов, то , (7)*

*Формулы (4-7) позволяют построить верхнюю треуг. Матрицу и матрицу Q с ортогон. столбцами Q=[], некоторые их которых могут быть нулевыми.*

*Если rankA = n, то матрица Q имеет ортонормир.столбцы. В частности, если m = n = rankA, то матрица Q будет ортогональной в этом случае.*

*Если столбцы матрицы А лин.зависимы, то возьмем из Q все ненулевые ортонормир. столбцы, и дополним их до ортонормир.базиса столбцами , p – число ненулевых столбцов в матрице Q. Затем заменим первый нулевой столбец в матрице Q на , 2-ой – на и т.д. Полученную ортогон.матрицу обозначим Q’. QR=Q’R(но в Q’ нет нулевых столбцов).Поскольку новые столбцы матрицы Q’ соотв.нулевым строкам в матрице R. В итоге получаем:*

*A=Q’R(искомое разложение матрицы А).*

*Лемма 1:*

*Матрица Q ортогональна тогда =, т.е.отображение Q сохраняет евклидову норму.Док-во. Положим, S=Q. Тогда . Если Q ортогональна, то S=E. Следует . Рассмотрим обратный вариант: Если Q сохраняет норму ( Sx,x)=(x,x) для любого x из . Полагаем в качестве вектора x=(i-тая координата =1, остальные 0). Получаем:(S,*

*Eсли в качестве x=то значит*

*Таким образом S=E, поскольку матрицы S симметрична.*

*Лемма 2:*

*Если матрицы P и Q ортогональны, то их композиция PQ также явл.ортогональной*

***8) Плоские вращения Гивенса***

*Рассм. задачу: Для a,b из R найти c,s из R, такие, что , ,*

*r=. Решение: с=±, s=±*

*В общем случае для вектора из можем найти матрицу , такую, что*

*, ,*

*Матрица наз.матрицей вращения Гивенса.*

*Отображение поворачивает векторы в плоскости орт( по часовой стрелке на угол и следует явл.ортогональной.*

*Лемма:*

*Пусть заданы матрица и A’=, где 1≤p≤q≤m. Тогда*

1. *Строки с номерами p,q матрицы A’ явл.лин.комбинациями этих же строк матрицы А.*
2. *Все остальные строки этих матриц совпадают. Док-во.следует из определения матрицы*

*Из этой леммы следует, что мы можем последовательно занулять элементы, расположенные под главной диагональю матрицы А, столбец за столбцом.*

*Справедива теорема 3:*

*Для любой А существуют (матрицы Гивенса), что ((, R – верхнетреуг.матрица*

*<-> A = QR*

***9) Хаусхолдер***

*Для ненулевого вектора u из матрица*

*– отражение(матрица) Хаусхолдера для ненулевого u. Поскольку H\*u=-u, H\*v=v, если , то матрица Хаусхолдера отражает некоторый вектор x из относительно*

*m-1-гипермерной плоскости, ортогональной вектору u.*

*Лемма:*

*Если для любых двух векторов a, b равной длины построить вектор u=a-b, то преобразование Хаусхолдера отображает вектор a на b.*

*В частности: для любого U из если выбрать b=γ, γ=±||U||; то , если u= γ*

*Теорема:*

*Для произвольной A существует матрицы Хаусхолдера , такие, что*

*Док-во. Матрица Хаусхолдера H явл.симметричной и ортогональной, т.к. отражение Хаусхолдера явл.изометрией(сохран.длину вектора). В качестве выбираем , такую, что u=a-, где a – 1-ый столбец матрицы A. Матрица в результате в качестве первого столбца имеет вектор .*

*Предположим, что 1-ые столбцы вплоть до k-1-го матрицы A’= приведены к верхнетреугольной форме. Для определения очередной = строим u:*

*. Нулевые компоненты вектора u обеспечивают его ортогональность в предыдущих k-1 столбцах матрицы A’, поэтому на них не влияет отражение . Остальные n-k компоненты в силу сформулир.выше леммы.Конец док-ва*

*Замечания:*

1. *Если матрица Q требуется в явном виде, то вначале полагаем Ω=E и на каждом шаге Ω заменяем произведением . В конце построений находим Q как*
2. *Если матрица А – плотная(заполненная), то следует применять отражение Хаусхолдера.*
3. *Если матрица А – разряжённая, то вращение Гивенса более эффективно.*

***10)Сходимость МПИ***

*A из , H – матрица итераций. – спектр матрицы А(совокупность собственных знач.) ρ(H) – спектральный радиус матрицы H(max по модулю собств.значение)*

*МПИ:*

*, из*

*Теорема:*

*, k->+****∞,*** *для любого из когда ρ(Н)<1.*

*Док-во:* ***Необходимость****. Пусть погрешность для любого из (т.е. МПИ сходится). Поскольку для любого λ из существует , такое, что Н, то выбирая , получим: = ||||=||||=|||, следует , следует |λ|<1, следует ρ(Н)<1*

***Достаточность****. Если докажем, что ρ(Н)<1, следует , то для любого из . Через J=diag{ – жорданова форма матрицы H. Н=, где имеет вид . ||<1.*

*Очевидно, что ттогда для любого i. Пусть k>, – размер блока . , тогда , т.к. для любого . для любого ||<1 следует для любого следует .*

***11)Метод Ричардсона***

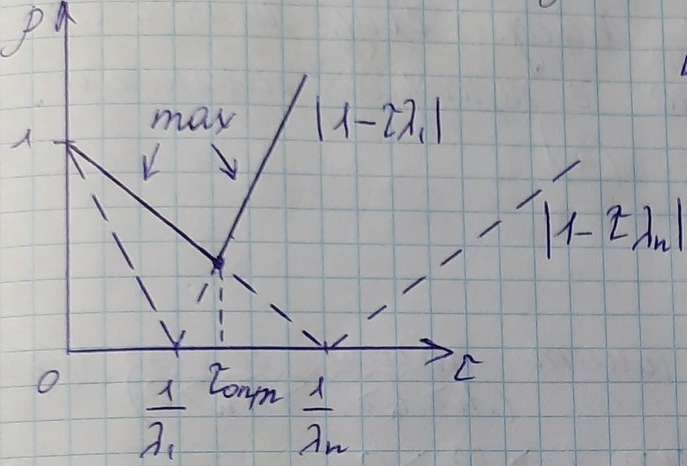
*- для решения Ax=b, - коэф. итерации(ответств. за скорость сход.)*

*Вектор невязки: тогда: , (матрица итерации). Выбор параметра определяется следующей теоремой*

*Теорема. Пусть матрица - полож. определенная и - собственные значения. Стационарный метод Ричардсона сходится ⬄ когда 0<, причем ;*

*Док-во. Собственные значения матрицы : 1 - => метод Ричардсона сходится ⬄ когда <1 . То есть если т.к. =>*

*Найдем , которое минимизирует . С этой целью посторим график.*

**

*достигается когда => Док-во окончено.*

*Следствие. Если , то метод Ричардсона сходится причём погрешность , где*

*Док-во.*

*(т.к. ) и подобна , поэтому , и так как , то искомый результат следует из Док-во окончено.*

*() Таким образом метод Ричардсона состоит из след. шагов: 1) находим решение (находим ); 2) находим ; 3) находим новый вектор невязки ; 4)повторяем 1) и т.д.*

***12)Теорема Самарского***

*Пусть и , тогда если , то метод Ричардсона сходится*

*Док-во. , то на k-ой итерации получаем . Используя тождество находим . Умножив скалярно на вектор 2 и учитывая, что ( (),())получаем*

*, а так как находим, что . Т.к. эта числовая последовательность невозрастает и ограничена снизу нулём, то она сходится. Перейдем к пределу:*

*=> . Запишем в виде , тогда переходя к пределу при получаем, что метод Ричардсона сходится.*

***13)Метод Якоби решения СЛАУ***

*Рассмотрим решение системы , и .*

*Метод Якоби : , , - начальное нулевое приближение. Подробные итерации выполняются до тех пор пока не будет выполнено . Введя диагональную матрицу можем записать метод Якоби в матричном виде: , - для вектора погрешности .*

*Если , то достаточное условие сходимости метода Якоби дает теорема Самарского => , так как для D выполняется , то это условие и необходимое. Действительно, матрица перехода и , поэтому из => ⬄ .*

*На практике часто используют следующие достаточное условие сходимости:*

*Теорема 1. Если то метод Якоби сходится*

*Док-во. Для матрицы перехода выпишем i-ую строку При условии теормы получаем => => выполняется достаточное условие сходимости т.к.*

*Теорема 2. Если то метод Якоби сходится*

*Док-во. Рассмотрим j-ый столбец матрицы : Из условии теормы получаем => (спектральный радиус матрицы перехода), т.е. выполняется достаточное условие сходимости.*

***14)Метод Зейделя***

*Запишем i-ое уравнение системы : , =>*

*и итерационный метод зейделя выглядит так: . Запишем его в матричном виде: ,*

*Теорема 1. Если , то метод Зейделя сходится*

*Док-во. По теореме Самарского достаточно проверить выполнение условия . Поэтому рассмотрим =>*

*Теорема 2. Пусть , . Тогда метод Зейделя сходится со скоростью геометрич.прогрессии и для погреш. верна оценка: (погреш. нулевого приближ.)*

*Док-во. Пусть достигается при , т.е. . Из условия теоремы следует, что => =>*

***15)Метод последовательной верхней реклоксации***

*Рассмотрим систему : более быструю сходимость чем у метода Зейделя или Якоби можно получить, если , где отвечает за скорость сходимости. При - верхняя релаксация, при - нижняя релаксация, при - метод Зейделя. В индексной форме метод релаксации: ; В векторной форме: Отсюда можно записать что матрица перехода*

*Теорема. Для метода релаксации , где рав-во достигается в случае, если все => метод релаксации сходится только при*

*Док-во. Т.к. определитель треугольной матрицы = произв. её диагональных эл-ов, то и по теореме Виета =>*

*Теорема. Если , то метод релаксации сходится в случае*

*Док-во. метод релаксации в матричной форме: можно представить в виде: , где Для сходимости применим теорему Самарского: => метод сходится, если . Найдем скалярное произведение: и условие сходимости примет вид: (т.к. ()>0 и )*

***16)Метод градиентов***

*Покажем, что решение эквивалентно минимизации функционала: ; градиент от равен: получаем, что - является критической точкой . В силу условия это решение является точкой минимума .*

*Минимизация на некотором подмножестве эквивалентна минимизации нормы погрешности . Действительно, а так как не зависит от , минимизация эквивалента минимизации нормы разности.*

*Алгоритм последовательной минимизации функционала : 1) определяем вектор спуска ; 2) находим точку минимума =() из условия ; 3) находим очередное приближение:*

*Найдем*

*Вектор градиента указывает направление наискорейшего спуска . Поэтому в качестве мы можем взять ,где - вектор невязки, тогда ; . Эти формулы и определяют алгоритм метода градиента.*

*Исследуем сходимость метода градиента: пусть k-ая итерация метода градиента, сделаем один шаг по методу Ричардсона с . Для метода Ричардсона выполняется оценка . Более того: так как вектор , построенный по методу градиента, минимизирует А-норму(энергетическая норма) вектора погрешности, среди всех векторов то норма погрешности т.о. из (1) и (2) находим .*

***17)Метод сопряжённых градиентов***

Итерация метода CG минимизирует функционал

(3)

Здесь - нулевое приближение, - подпространство Крылова

(4)

- невязки на 0 и k итерации.

Если - минимальное значение (в), то

Покажем, что точное решение (1)

Из теоремы Кэли-Гамильтона следует

Умножая на, находим

, т.е..

Свойства:

Если найдена CG итерация, то либо, либо можно найти вектор направления поиска такой, что

(5)

Как только установлен, скаляр находим из условия минимума в точке :

, (6)

или (7)

(7)-> (8)

*Лемма 1* Пусть и итерации CG. Тогда

(9)

Док. Так как минимизирует на , то

при t=0 (10)

Поскольку (11)

то (12)

Так как ( и свойство вложения ),

то лемма доказана. Если то и из Л.1 следует:

*Лемма 2* Пусть и итерации CG. Если , то определяется с точностью до скалярного множителя условиями

(13)

Док. Так как , то по Л.1

(14)

Из (12, 14)  (15)

Из (14) является A- ортогональным .

Условие называют A-сопряженностью подпространству . Любой , удовлетворяющий (13), можно представить в виде

с точностью до скалярного множителя.

*Теорема 1.* Пусть. Тогда

(16)

Док. Из Л.2 и следует, что достаточно найти , при котором из (16) удовлетворяет условиям

(17)

Из (16) (18)

Если. Из Л.2

. (19)

Если , то из (18) находим

  (20)

Покажем, что знаменатель в (20) ненулевой.

Из (5) (21)

Поэтому (22)

Так как по Л.1, то

(23)

Можно показать, что

(24)

Для оценки погрешности CG можно использовать формулу

***18)Обобщенный метод минимальных невязок***

*Решаем систему линейных алгебраических уравнений*

*(1)*

*Приближенное решение будем искать в виде суммы*

*, (2)*

*где - нулевое приближение, - подпространство Крылова*

*, (3)*

*- невязка начального приближения.*

*Алгоритм GMRES определяет z таким образом, что евклидова норма невязки является минимальной, то есть минимизирует*

*. (4)*

*Рассмотрим основные этапы алгоритма.*

1. *Построение ортонормированного базиса*

*Будем использовать процедуру ортогонализации Арнольди записанную псевдокодом*

*Двойной цикл кода соответствует формуле*

*.*

*Векторы образуют ортонормированный базис , - элементы верхней матрицы Хессенберга с нулевыми элементами ниже первой поддиагонали. Матрица расширена за счет элемента в дополнительной m+1 строке и будет использоваться при минимизации невязки (4)*

*. (5)*

1. *Минимизация невязки*

*Коррекция z начального приближения ищется в виде*

*. (6)*

*Коэффициенты разложения образуют вектор*

*(7)*

*Можно показать, что*

*- матрица столбцов .*

*Введем вектор е размерностью m+1*

*(10)*

*Поскольку то .*

*Следовательно, норму невязки (4) с учетом (8) можно записать в виде*

*(11) Поскольку в (11) ортогональная матрица, она не меняет длину вектора.*

*Задачу минимизации невязки теперь можно упростить*

*(12)*

*и решить с помощью QR факторизации.*

1. *QR алгоритм*

*Найдем разложение матрицы*

*где (13)*

*с помощью вращений Гивенса*

*(14)*

*Здесь - единичная матрица размерностью j\*j, ипредставляют cos,sin угла вращения в плоскости .*

*Матрица имеет размерность , является верхней треугольной с последней нулевой строкой.Так как , то для нормы (12) имеем*

*(15)*

*где . (16)*

*Так как последняя строка нулевая, то вектор в m+1 строке имеет элемент .*

*Введем обозначение для первых m компонент*

*(17)*

*Тогда (15) будет иметь вид*

*(18)*

*Если мы выберем так, чтобы , то для задачи минимизации (12) получим*

*(19)*

*Компоненты находим из системы*

*. (20)*

*Затем находим z из (6) и решение (2) задачи (1).*

*Замечание. Для оценки погрешности можно использовать , поскольку*

*(21)*

1. *Сходимость GMRES*

*Скорость сходимости зависит от свойств матрицы A.*

*Если , то*

*. (22)*

*В частности, если , то*

*(23)*

*В общем случае имеет место оценка*

*(24)*

*где - множество полиномов степени не выше m таких, что , V - матрица из спектрального разложения - спектр матрицы A.*

***19)Степенной метод***

*Степенной метод без сдвига. Рассмотрим задачу нахождения максимального по модулю собственного значения матрицы A, полагая*

*(1)*

*Выберем произвольный вектор и построим последовательность приближений и к решению задачи (2)*

*Правая часть в (4) – это отношение Рэлея при . Если в отношении Рэлея в качестве вектора x взять собственный вектор матрицы A, то получим соответствующее собственное значение.*

*Теорема 1 Пусть A - матрица простой структуры, для которой выполняется условие (1). Допустим, что в разложении по собственным векторам единичной длины*

*(5) коэффициент . Тогда при и выполняется оценка относительной погрешности*

*. (6)*

*Док. Поскольку , то и*

*. (7)*

*Введем и заметим, что при при и*

*.*

*(8) Поскольку при , то (9)*

*и (10)*

*Более того из (10) следует*

*(11)*

*Используя неравенство Коши-Буняковского, имеем*

*(12)*

*Из (9,11,12) следует*

*, (13)*

*что и требовалось доказать.*

*Замечание 1. Теорема справедлива для произвольных матриц, удовлетворяющих условию (1). Матрица простой структуры используется только для упрощения доказательства.*

*Замечание 2. Для того, чтобы в ходе вычислений не возникали ситуации с переполнением или исчезновением порядка вектор обычно нормируют.*

*Например, выбираем , такой что , затем*

*(14)*

*В этом случае имеет единичную длину.*

*Если , то можно использовать процесс*

*(15)*

*Тогда . (16)*

*Замечание 3. Стартовый вектор может иметь нулевую координату в разложении (5). На практике ненулевая координата возникает всегда в ходе итераций из-за ошибок округления.*

*Замечание 4 Доминирующее собственное значение может быть кратным. В этом случае итерации сходятся к линейной комбинации собственных векторов.*

*Замечание 5. Если матрица A и стартовый вектор действительные, то итерации никогда не сойдутся к комплексному вектору.*

*Степенной метод со сдвигом.*

*Скорость сходимости степенного метода зависит от отношения , где следующее за максимальное по модулю собственное значение. Можно выбрать сдвиг такой, что*

*(17)*

*и применить степенной метод к матрице для нахождения . В конечном счете находим*

*(18)*

*Вычисление минимального собственного значения.*

*Задача вычисления минимального собственного значения матрицы легко сводится к задаче*

*вычисления максимального собственного значения*

*матрицы где , так как . Оценку спектрального радиуса легко найти: . Тогда процесс (15) имеет вид*

*(19)*

*Используя (16, 19) находим*

*. (20)*

*Обратные итерации.*

*Собственные значения матриц A и связаны соотношением*

*. (21)*

*Таким образом, наименьшее собственное значение A является обратной величиной к наибольшему собственному значению . Поэтому для нахождения можно применять степенной метод с обратной матрицей.*

*(22)*

*(23)*

*Обратная матрица явным образом не вычисляется. Для решения системы (22) предварительно находят факторизацию матрицы A, которая затем применяется на каждой итерации. Обратные итерации сходятся к собственному вектору, соответствующему наименьшему по модулю собственному значению.*

*Обратная величина доминирующего собственного значения является наименьшим значением A по модулю.*

*Сдвиг матрицы может значительно ускорить сходимость итерационного процесса. Если требуется*

*найти собственное значение, расположенное рядом с заданным , то его следует использовать в качестве сдвига. Если требуется найти собственный вектор для известного собственного значения , то надо также использовать сдвинутую матрицу .*

*Если известно приближение собственного вектора, то отношение Рэлея дает хорошую оценку для соответствующего собственного значения. И наоборот, обратные итерации быстро сходятся, если отношение Рэлея брать в качестве сдвига:*

*Эта схема особенно эффективна для симметричных матриц. Сдвинутую матрицу следует факторизовать на каждой итерации. Эти затраты окупаются быстрой скоростью сходимости.*

***20)*** ***QR итерации***

*QR метод решает проблему нахождения всех собственных значений матрицы A одновременно. Алгоритм стартует с матрицы . На K-ой итерации вычисляем QR факторизацию (1)*

*и находим следующее приближение (2)*

*которое стремится к верхней треугольной матрице с ростом K.*

*Поскольку из (1, 2) следует , (3)то все матрицы являются подобными.*

*Диагональные элементы матрицы сходятся к собственным значениям матрицы A. Произведение ортогональных матриц сходится к матрице собственных векторов A.*

*Если , то QR итерации сохраняют симметрию, поэтому последовательность сходится к матрице, которая является треугольной и симметричной, то есть диагональной. Итерационный процесс (1, 2) продолжается до тех пор, пока внедиагональные элементы матрицы больше заданной точности .*

*Теорема. Пусть Тогда все собственные значения A различные и положительные . (4)*

*Для матрицы A существует спектральное разложение (5)*

*где U- верхняя треугольная матрица с неотрицательными диагональными элементами.Тогда базовый алгоритм QR последовательно находит которые сходятся к диагональной матрице A.*

*Доказательство. Для простоты будем полагать, что каждая найденная QR факторизация включает верхнюю треугольную матрицу R с неотрицательными диагональными элементами, что обеспечивает единственность разложения. Из (5) следует*

*(6)*

*Из (5, 6) находим*

*(7)*

*Рассматривая , находим*

*(8)*

*Таким образом, заключаем, что . Отсюда следует, что . Так как QR разложение единственное, то (а значит и .*

*Наконец, мы находим, что .*

*Последняя сходимость имеет место в силу того, что является симметричной и подобной A.*

*Замечание. Теорема будет выполняться, если убрать требование и что U имеет неотрицательные диагональные элементы.*

*Рассмотренный базовый алгоритм является затратным. Он требует выполнения на каждой итерации операций. Кроме того, он может иметь медленную скорость сходимости, в зависимости от собственных значений A. Существуют три подхода для улучшения базового алгоритма.*

1. *Редуцировать матрицу Aк подобной верхней матрице Хессенберга. При этом число операций на одну итерацию сокращается до . Кроме того, QR итерации не нарушают структуру матрицы Хессенберга.*
2. *Найденные собственные значения можно убрать, что значительно ускоряет процесс вычислений.*
3. *В QR алгоритме можно использовать сдвиги.*

*Рассмотрим редукцию матрицы A к подобной верхней матрице Хессенберга H, в итоге обе матрицы будут иметь одинаковый набор собственных значений. С это целью удобно использовать ортогональные отражения Хаусхолдера, которые последовательно обнуляют столбцы элементов ниже первой под-диагонали.*

*После первого отражения находим*

*.(\*)*

*В полученной матрице можно исключить первую строку и первый столбец, а затем сделать аналогичное отражение для матрицы меньшей размерности. Повторяя эту рекурсию, в итоге получим (\*)*

*После редукции быстрый алгоритм QR имеет вид*

*Рассмотрим процесс исчерпывания собственных значений (дефляцию). Наш алгоритм с редукцией Хессенберга тратит теперь . операций на одну итерацию, но сходится очень медленно. Обычно требуется выполнить тысячи итераций.*

*Заметим, что если , которая сходится к верхней треугольной, имеет форму*

*то является собственным значением матриц и A в силу их подобия. Оставшийся спектр матрицы Aсовпадает с собственными значениями матрицы . Итак, если нам повезло и элемент , то мы нашли одно приближенное значение и далее можем работать с матрицей меньшей размерности. Этот процесс называется дефляцией.*

*Рассмотрим алгоритм со сдвигом.*

*Алгоритм итерация QR по прежнему сохраняет структуру Хессенберга и создает последовательность подобных матриц. Идея сдвига – ускорить сходимость к нулю. Разумным выбором кажется сдвиг , поскольку при сходимости будет приближением собственного значения A. Но это не так- контрпример: .*

*Уилкинсон придумал сдвиг, который работает для симметричных матриц. Он предложил выбирать подматрицу 2x2 и находить оценку собственного значения. Пусть эта подматрица имеет вид . Тогда сдвиг находится по формуле*

*Если то произвольно.*

***21)Метод вращений Якоби***

*Метод Якоби решает полную проблему нахождения собственных значений вещественной симметрической матрицы (1)*

*Матрица A с помощью итерационной процедуры последовательно приводится к диагональной форме с заданной точностью путем обнуления наибольших по модулю внедиагональных элементов. При этом могут возникать новые ненулевые элементы, поэтому метод сходится достаточно медленно.*

*Итерационная процедура основана на преобразованиях подобия .*

*В качестве используются плоские вращения Гивенса . (3)*

*Здесь . Угол вращения выбирается так, чтобы внедиагональные элементы обращались в ноль. Отметим, что вращения изменяют только элементы матрицы расположенные в строках и столбцах с номерами p и q. Для построения введем симметрическую матрицу размерностью 2x2, элементы которой принадлежат итерации (4)*

*Тогда преобразование (1) для матрицы (4) будет иметь вид*

*(5)*

*Сравнивая внедиаглнальные элементы в (5) и учитывая симметрию , находим*

*(6)*

*Из формулы (6) находим . (7)*

*Для диагональных элементов из (5) находим (8)*

*где . Для определения t будем использовать значение из (7) , (9) и окончательно .(10) В качестве t следует брать меньший по модулю корень уравнения (10). При таком выборе и норма Фробениуса является минимальной. (11) Итак, на каждой итерации последовательно находим*

*Недиагональные элементы в строках и столбцах с номерами p и q также изменятся*

*(16)*

*Отметим, что на следующей итерации пара снова может стать ненулевой.*

*Сходимость метода Якоби основана на том факте, что норма Фробениуса недиагональных элементов (17) уменьшается на каждой итерации. Действительно, поскольку норма Фробениуса инвариантна относительно ортогональных преобразований, и так как только строки и столбцы p и q меняются в матрице , последовательно находим (18)*

*В классическом алгоритме выбираются индексы p и q такие, что является максимальным. Пусть - половина недиагональных элементов A.*

*Тогда (19)В силу оценки (19) из (18) следует (20) Из формулы (20) следует, что классический вариант выбора удаляемых элементов имеет линейную скорость сходимости. Можно показать, что при достаточно большом числе итераций kсуществует постоянная такая, что (21) где - матрица после kитераций Якоби. Таким образом, сходимость метода является квадратичной при выполнении условия .*

*Итерации Якоби повторяют до тех пор, пока для заданной точности не будет получена оценка (22)В этом случае диагональные элементы приближают собственные значения Aс ошибкой не больше .*

*Классический вариант метода Якоби на практике используется редко, так как он требует больших затрат на поиск доминирующих элементов. В циклическом методе Якоби недиагональные элементы обнуляются в соответствии с некоторым заданным порядком. Каждый элемент участвует в цикле только один раз. В циклическом методе вращение опускается для всех элементов . Для повышения скорости сходимости точность последовательно уменьшают после каждого цикла.*

*По затратам метод Якоби в 3-5 раз превосходит QR алгоритм. Ортогональную систему собственных векторов A находят с помощью последовательных произведений*

*(24) Если положить , тогда можно использовать рекурсию (25)*

***22)Дефляция Виландта***

*Техника дефляции позволяет на основе матрицы A сформировать новую матрицу B, у которой (1)*

*Таким образом, доминирующее собственное значение в спектре матрицы B заменяется нулем.*

*Теорема.Рассмотрим спектральную задачу*

*, (2)*

*где имеет единичную кратность. Выберем вектор X такой, что . (3) Тогда матрица (4)*

*имеет собственные значения и собственные вектора , причем*

*(5)*

*Доказательство.*

*Отсюда следует*

*Вектор x, соответствующий условиям теоремы можно выбирать разными способами. Следуя Виландту, будем полагать*

*(6)*

*где - ненулевая координата . Тогд (7)*

*Поскольку*

*(8) то . (9)*

*В итоге из (7) находим и вектор x (6) удовлетворяет условиям теоремы. Более того, i-ая строка B (4) является нулевой.*

*Если , то из отношения (10) следует, что i-ая координата должна также равняться нулю. Следовательно, i-ый столбец матрицы B не вносит вклад в произведение . Поэтому матрицу B можно заменить матрицей исключая i-ые стоку и столбец из матрицы B. Матрица имеет собственные значения . Пусть - доминирующее собственное значение , а соответствующий собственный вектор. Тогда вставив ноль между координатами и мы найдем собственный вектор матрицы B. После этого вектор можно найти по формуле (5).*

*Замечание. Процесс дефляции чувствителен к ошибкам округления. Поэтому найденное после дефляции доминирующее собственное значение рекомендуется использовать в качестве сдвига для исходной матрицы A.*